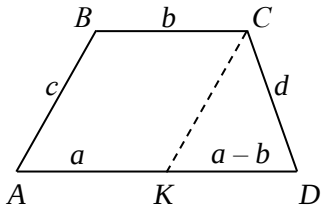
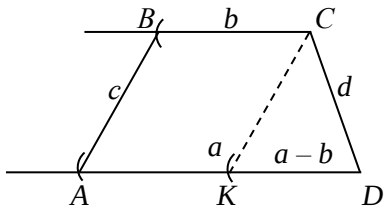
Решения заданий
II этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика» в 2018/2019 учебном году
8 класс

Номер задания	Решение	Оценивание в баллах
8-1.	Так как $1 < -b < 4$, то $\begin{cases} 2 < a < 3 \\ 1 < -b < 4 \end{cases}$, то $2 < a(-b) < 12$; $-12 < ab < -2$. *Ответ*: (–12;–2). **Итого**	**10 баллов**
8-2.	Так как $z > 2$ и простое, т. е. нечётное, то x – чётное, т. е. $x = 2$. *Ответ*: $(2, 2, 5)$. *Примечание*. Для получения 15 баллов приведенного решения (для восьмиклассников) достаточно. Если будет приведено доказательство единственности решения (например, методом сравнения остатков при делении $2^y + 1$ и z на 6), то необходимо добавить 15 баллов. **Итого**	*10 баллов* *5 баллов* **15 баллов (30 баллов)**
8-3.	Отложим на стороне *AB* отрезок *BD*, равный *BC*. Тогда треугольник *BCD* – равнобедренный с углом при вершине 20°, поэтому углы при основании равны 80°. Пусть *CE* – биссектриса треугольника *ABC*. Из условия следует, что $\angle ACE = 60^o$, поэтому $\angle AEC = 180^o - (40^o + 60^o) = 80^o$. Таким образом, в треугольнике *DEC* равны два угла, поэтому он равнобедренный. Тогда $\angle DCE$ равен 20°, поэтому $\angle ACD = 60^o - 20^o = 40^o$. Значит, треугольник *ACD* также равнобедренный, следовательно, *CE* = *CD* = *AD* = *AB* – *BD* = *AB*-*BC*=4. *Ответ*: *CE* = 4. **Итого**	*10 баллов* *10 баллов* *10 баллов* **30 балла**

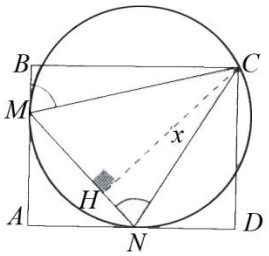
Номер задания	Решение	Оценивание в баллах
8-4	Наименьшая площадь, которую могут занимать десять попарно неравных квадратов, равна $1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 = 385\ (\text{см}^2)$ – это меньше площади исходного квадрата. Но следующая по величине площадь, занимаемая квадратами, равна $1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 + 11^2 = 406\ (\text{см}^2)$ – это больше площади исходного квадрата. Значит, разрезать квадрат требуемым образом нельзя. *Ответ*: нельзя. **Итого**	*10 баллов* *10 баллов* **20 баллов**
8-5.	Из равенства $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)$ следует $a^2 + b^2 + c^2 = 7^2 - 2 \cdot 25 = -1$, что невозможно. *Ответ*: не существует. **Итого**	*15 баллов* *10 баллов* **25 баллов**
	ИТОГО	**100 баллов**

Решения заданий
II этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика» в 2018/2019 учебном году
9 класс

Номер задания	Решение	Оценивание в баллах
9-1.	Разобьём промежуток (–1; 3) на два: $(-1;0)$ и $[0;3)$. При $0 \le b < 3$ получим: $0 \le ab < 15$. При $-1 < b < 0$, $0 < -b < 1$. Учитывая, что $2 < a < 5$, получим: $0 < -b \cdot a < 5$, т. е. $-5 < ba < 0$. Объединяя оба решения получим: $-5 < ab < 15$. *Ответ*: (–5;15). **Итого**	**10 баллов**
9-2.	Пусть n и p – число дней, когда дежурило 9 и 10 богатырей, причём каждый из них дежурил m раз. Тогда $9n + 10p = 33m$. При $m = 1$ нет решений, при $m = 2$ получим $n = 4, p = 3$. *Ответ*: 7 дней. **Итого**	*10 баллов* *10 баллов* **20 баллов**
9-3.	$k \cdot k! = (k+1)! - k!$, поэтому $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (2! - 1!) + (3! - 2!) + \ldots + \big((n+1)! - n!\big) = (n+1)! - 1$. *Ответ:* $(n+1)! - 1$. **Итого**	*10 баллов* *10 баллов* **20 баллов**
9-4.	Пусть $x \le y$, тогда $xyz \le 2y$, т. е. $xz \le 2$, откуда $x \le 2, z \le 2$. Ответ: $(2,2,1), (1,1,2)$. **Итого**	*10 баллов* *10 баллов* **20 баллов**

Номер задания	Решение	Оценивание в баллах
9-5.	1. Пусть даны основания a и b и боковые стороны c и d. Предположим, что трапеция построена. Проведём $CK \parallel AB$. Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $CK = AB = c, AK = BC = b$, откуда $KD = a - b$. $\triangle KCD$ может быть построен по трём сторонам c, d и $a - b$, а затем достроен до трапеции.	*10 баллов*
	2. Построение. Строим отрезок $a - b$. Строим $\triangle KCD$ по трём сторонам, где $KD = a - b, KC = c, CD = d$. Строим прямую, параллельную KD и проходящую через точку C. На построенной прямой откладываем отрезок $CB = b$, на прямой KD откладываем отрезок $AD = a$. Соединяем точки A и B. Трапеция $ABCD$ – искомая.	*10 баллов*
	3. Доказательство. $BC = b$, $AD = a$, $CD = d$, $BC \parallel AD$ по построению. Докажем, что $AB = c$. Так как $AK = AD - KD = a - (a - b) = b$, то отрезки AK и BC равны и параллельны. Тогда $ABCK$ – параллелограмм по признаку параллелограмма. Отсюда $AB = KC = c$.	*5 баллов*
	4. Исследование. Как следует из доказательства, задача имеет решение, если из отрезков c, d и $a - b$ можно построить треугольник, а это возможно, если выполняется неравенство треугольника: $$\begin{cases} c + d > a - b, \\ c + (a - b) > d, \\ d + (a - b) > c. \end{cases}$$   	*5 баллов*
	Итого	**30 баллов**
	ИТОГО	**100 баллов**

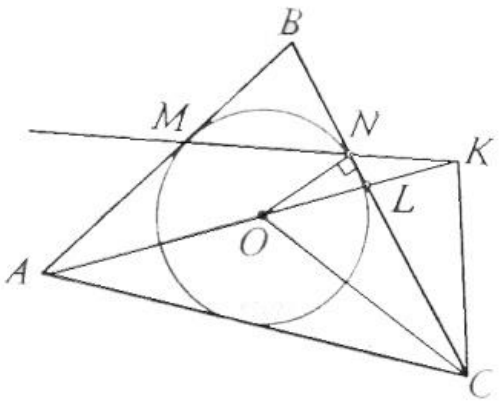
Решения заданий
II этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика» в 2018/2019 учебном году
10 класс

Номер задания	Решение	Оценивание в баллах
10-1.	1. $\begin{cases} 2{,}6 < 2a < 3 \\ -2{,}4 < -b < -2{,}1 \end{cases}$, тогда $0{,}2 < 2a - b < 0{,}9$. 2. $\begin{cases} 2{,}6 < 2a < 3 \\ 2{,}1 < b < 2{,}4 \end{cases}$, тогда $4{,}7 < 2a + b < 5{,}4$. 3. $\begin{cases} 0{,}2 < 2a - b < 0{,}9 \\ 4{,}7 < 2a + b < 5{,}4 \end{cases}$, тогда $0{,}2 \cdot 4{,}7 < (2a - b) \cdot (2a + b) < 0{,}9 \cdot 5{,}4$,т. е. $0{,}94 < (2a - b) \cdot (2a + b) < 4{,}86$. *Примечание.* Недопустимо использование формулы $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ *Ответ*: (0,94; 4,86). **Итого**	**10 баллов**
10-2.	Угол между касательной и хордой равен половине дуги, которую отсекает хорда, а вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается.  Следовательно, углы *BMC* и *HNC* равны, так как оба равны половине дуги *MC*. Значит, прямоугольные треугольники *MBC* и *NHC* подобны и $\frac{BC}{CM} = \frac{x}{CN}$. Аналогично из подобия треугольников *NDC* и *MHC* можем записать $\frac{CD}{CN} = \frac{x}{CM}$. Перемножим почленно два полученных равенства, получим $CD \cdot BC = x^2$. Значит, площадь четырёхугольника ABCD равна x^2 . *Ответ*: x^2 . **Итого**	*5 баллов* *10 баллов* *5 баллов* **20 баллов**

Номер задания	Решение	Оценивание в баллах
10-3.	Пусть разность прогрессии равна d и один из её членов $a = m^2$, где m – натуральное число. Тогда число $(m + kd)^2 = m^2 + 2mkd + k^2d^2 = a + d(2km + k^2d)$ также является членом прогрессии при любом натуральном k. Итак, указано бесконечное количество членов прогрессии, являющихся квадратами натуральных чисел. **Итого**	*5 баллов* *15 баллов* *5 баллов* **25 баллов**
10-4	Преобразуем подкоренное выражение: $\underbrace{11\ldots\cdot 1}_{n}\underbrace{44\ldots\cdot 4}_{2n} = \frac{10^n - 1}{9}\cdot 10^{2n} + 4\cdot\frac{10^{2n}-1}{9}$ $= \frac{10^{3n} + 3\cdot 10^{2n} - 4}{9} =$ $= \frac{10^{3n} - 10^{2n} + 4\cdot 10^{2n} - 4}{9}$ $= \frac{10^{2n}(10^n - 1) + 4(10^{2n} - 1)}{9}$ $= \frac{10^{2n}(10^n - 1) + 4(10^n - 1)(10^n + 1)}{9}$ $= (10^n - 1)\cdot\frac{10^{2n} + 4\cdot 10^n + 4}{9}$ $= (10^n - 1)\cdot\left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2$. Число $\frac{10^n+2}{3}$ целое, т. к. сумма цифр числа $10^n + 2$ равна 3, следовательно, $10^n + 2$ делится на 3. Заметим, что число $10^n - 1$ не может быть квадратом некоторого натурального числа при $n > 1$, т.к. $10^n - 1$ даёт в остатке 3 при делении на 4, а квадраты целых чисел могут давать в остатке при делении на 4 только 0 или 1. Таким образом, доказано, что выражение, стоящее под знаком квадратного корня, не является квадратом целого числа, что и означает иррациональность квадратного корня. **Итого**	*10 баллов* *5 баллов* *10 баллов* **25 баллов**

Номер задания	Решение	Оценивание в баллах
10-5.	Предложим, то такая функция f существует. Пусть $x = 0$. Тогда $f(0) - (f(0))^2 \geq \frac{1}{4}; \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0; f(0) = \frac{1}{2}$. Аналогично, $f(1) = \frac{1}{2}$ (противоречие). *Ответ*: не существует. **Итого**	*10 баллов* *5 баллов* **15 баллов**
	ИТОГО	**100 баллов**

Решения заданий
II этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика» в 2018/2019 учебном году
11 класс

Номер задания	Решение	Оценивание в баллах
11-1.	Из формул приведения следует, что $\cos 6 = \sin\left(6 - \frac{3\pi}{2}\right)$. Тогда, учитывая, что $$0 < 6 - \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2}, 0 < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2},$$ получаем, что угол $\alpha = 6 - \frac{3\pi}{2}$ радиан и угол $\beta = \frac{3}{2}$ радиан — острые. Поэтому в силу неравенства $$\alpha = 6 - \frac{3\pi}{2} < \frac{3}{2} = \beta$$ и возрастания синуса на $(0; \frac{\pi}{2})$ имеем $$cos6 = sin\alpha < sin\beta = \sin\left(\frac{3}{2}\right).$$ *Ответ*: $cos6 < \sin\left(\frac{3}{2}\right)$. **Итого**	*5 баллов* *5 баллов* *5 баллов* **15 баллов**
11-2.	Покажем, что около четырёхугольника $CONK$ можно описать окружность, где O – центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности.  Пусть $\angle C = \gamma, \angle B = \beta$. Тогда $\angle AOC = 90^o + \frac{\beta}{2}, \angle KOC = 90^o - \frac{\beta}{2}, \angle OCN = \frac{\gamma}{2}$.	*10 баллов*

	Значит, $$\angle OLC = 180^{\circ} - 90^{\circ} + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^{\circ} - \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}.$$ $\triangle MBN$ – равнобедренный и $\angle BNM = 90^{\circ} - \frac{\beta}{2}$. Отсюда $\angle NKO = 180^{\circ} - \angle LNK - \angle NLK = 180^{\circ} - \angle MNB - \angle OLC = 180^{\circ} - -90^{\circ} + \frac{\beta}{2} - 90^{\circ} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2} = \angle OCN$, что и доказывает вписанность четырёхугольника $CONK$ в окружность. Но тогда $\angle OKC = \angle ONC = 90^{\circ}$. Значит, $\angle AKC = 90^{\circ}$, что и требовалось доказать. **Итого**	*10 баллов* *5 баллов* **25 баллов**
11-3.	Разобьём промежуток $(-1{,}2; 1{,}4)$ на два: $(0; 1{,}4)$ и $(-1{,}2; 0)$ $(b \neq 0$, так как b – знаменатель$)$. 1. Пусть $0 < b < 1{,}4$, тогда $\frac{1}{b} > \frac{1}{1{,}4}$, т. е. $\frac{1}{b} > \frac{5}{7}$ и $a > 2{,}6$. Значит $\frac{a}{b} > \frac{5}{7} \cdot \frac{26}{10}$. Следовательно, $\frac{a}{b} > \frac{13}{7}$. 2. $-1{,}2 < b < 0$ или $1{,}2 > -b > 0$, тогда $\frac{1}{-b} > \frac{1}{1{,}2} = \frac{5}{6}$. Значит $\begin{cases} \frac{1}{-b} > \frac{5}{6}, \\ a > 2{,}6 \end{cases}$ т. е. $\frac{a}{-b} > \frac{5}{6} \cdot \frac{26}{10} = \frac{13}{6}$, следовательно, $\frac{a}{b} < -\frac{13}{6}$. Объединяя решения, получим $$\frac{a}{b} \in \left(-\infty; -\frac{13}{6}\right) \cup \left(\frac{13}{7}; \infty\right).$$ **Итого**	**10 баллов**
11-4	Для того чтобы корни квадратного уравнения $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ были рациональными, надо, что бы выражение $b^2 - 4ac$ являлось полным квадратом. Пусть $b = 2n + 1, a = 2p + 1, c = 2q + 1$. $$b^2 - 4ac = (2n+1)^2 - 4(2p+1)(2q+1) = 4n^2 + 4n - 16pq - 8p - 8q - -3 = 8\left(\frac{n(n+1)}{2} - 2pq - p - q - 1\right) + 5$$ – нечётное число, так как $n(n+1)$ делится на 2. Значит, дискриминант является квадратом нечётного числа, то есть (поскольку каждое нечётное число можно представить в виде $4k \pm 1$) $D = (4k \pm 1)^2 = 16k^2 \pm 8k + 1 = 8(2k^2 \pm k) + 1$ – это число при делении на 8 даёт остаток 1 .	*10 баллов* *10 баллов*

	Но $b^2 - 4ac$ при делении на 8 даёт остаток 5, противоречие. Значит, $b^2 - 4ac$ не может являться полным квадратом. Тогда корни не могут быть рациональными, что и требовалось доказать. **Итого**	*10 баллов* **30 баллов**
11-5.	Пусть $x = y = 0$. Тогда имеем: $f(0) = 2f(0)$; $f(0) = 0$. Подставим: $y = 0$, $f(x^2) = f(x) + f(0)$, $f(x^2) = f(x)$. Значит, $f(x^4) = f(x^2) = f(x)$. Пусть $y = -x^2$, тогда $f(0) = f(x) + f(x^4), 2f(x) = 0, f(x) = 0$. Проверка показывает, что единственная найденная функция удовлетворяет условию задачи. *Ответ*: $f(x) = 0$. **Итого**	*10 баллов* *10 баллов* **20 баллов**
	ИТОГО	**100 баллов**

Предлагаемые критерии

оценки выполнения заданий II этапа республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика» в 2018/2019 учебном году

1. Каждая задача оценивается определённым количеством баллов. В решении задач предложено количество выставляемых баллов за каждый верный этап решения задачи, если методы решения данных задач совпадают. В противном случае руководствоваться пунктами 2-9.

2. За полностью решенную и оформленную задачу – предложенное количество баллов.

3. За неполное решение, при наличии ошибок и недочетов в решении и оформлении – целое число баллов от 1 до предложенного максимума баллов.

4. За принципиально неверный подход к решению или при отсутствии решения – 0 баллов.

5. За оригинальное решение задачи (менее трудоемкое, чем предложенное составителем) оценка может быть повышена на 10 % баллов от предложенного максимума баллов.

6. Оценка снижается на 10% баллов в случае, если решение в целом верно, но есть или ошибка/ошибки (описка/описки) в промежуточных вычислениях или незначительный логический пропуск в рассуждениях, не отразившийся на правильном конечном результате

7. Оценка снижается на 20% баллов в случае, если решение в целом верно, но есть ошибка (описка) в промежуточных вычислениях, в результате которой получен численно неправильный конечный результат.

За каждую последующую ошибку (описку) в пределах задания, дополнительно искажающую результат, оценка дополнительно снижается на 10% баллов от заявленных .

За переходящую ошибку баллы повторно не снимаются.

8. Оценка снижается на 60% баллов в случае, если есть предпосылки к решению, например, сформулированы положения, которые могут привести к решению, но решения нет или допущена грубая ошибка.

9. Оценка снижается на 80% баллов в случае, если решение начато, но неверно, есть правильно сформулированные теоретические положения.